Τέταρτο διαγώνισμα στις επιφάνειες

Διάρκεια 2 Ώρες

Θέμα 1

Δίνεται η επιφάνεια S με παραμετρική παράσταση

$$X(u,v) = (u, u+\cos v, \sin v)\,, (u,v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

(i) Να αποδείξετε ότι η X είναι κανονική.

(ii) Να εξετάσετε αν το διάνυσμα $\vec{w} = (1,0,0)$ εφάπτεται της S στο σημείο $P_0(1,1,1)$, αφού πρώτα διαπιστώσετε ότι το P_0 είναι σημείο της εν λόγω επιφάνειας.

(iii) Να βρείτε την τιμή της απεικόνισης Weingarten στο P_0 ως προς τη διεύθυνση $\vec{w}$.

(iv) Να βρείτε τις κύριες καμπυλότητες της επιφάνειας S στο P_0.

(v) Να βρείτε την κάθετη καμπυλότητα της S στο $\vec{w}$.

Θέμα 2

Δίνεται η επιφάνεια S με παραμετρική παράσταση

$$X(u,v) = (u, v, \log u - \log v)\,, (u,v) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty).$$

(i) Να βρεθουν οι ασυμπτωτικές γραμμές της S που διέρχονται από το σημείο $X(1,1)$.

(ii) Να βρεθούν οι ασυμπτωτικές διευθύνσεις της S που διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(iii) Εξετάστε αν X σύστημα ασυμπτωτικών γραμμών.

(iv) Να βρείτε (αν υπάρχει) μέσω κατάλληλης αναπαραμέτρησης της S σύστημα ασυμπτωτικών γραμμών.

Θέμα 3

Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια $X\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με

$$X(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right), (u,v) \in \mathbb{R}^2\,.$$

(i) Να δείξετε ότι η X είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια.

(ii) Να βρεθούν η πρώτη και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή, η καμπυλότητα Gauss, η μέση καμπυλότητα καθώς και οι κύριες καμπυλότητες της επιφάνειας στο τυχαίο σημείο της.

(iii) Να βρεθούν οι γραμμές καμπυλότητας αυτής και να εξετάσετε αν X είναι δίκτυο γραμμών καμπυλότητας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ